محاضرة 4 صفحة 1

دوال المحاضرة الرابعة

Subject:

$$\forall x', x'' \in [a,b] : |f(x') - f(x'')| \leq L|x' - x''|$$

$$\forall\ T \in P[a,b] ;\ T : \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

$$V(f,T) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \sum_{k=1}^{n} L(x_k - x_{k-1})$$

$$= L\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = L(b-a)$$

إذاً $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \leq L(b-a)$

ملاحظة: اذا كانت الدالة مطردة تحقق التعميم

$$V(f,T) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\right| = |f(b) - f(a)|$$

$$\sup_{T \in P(a,b)} V(f,T) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |f(b) - f(a)|$$

$$\overset{\infty}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_{A > a} \overset{A}{\underset{a}{V}}(f) = \lim_{A \to \infty} |f(A) - f(a)| = |f(\infty) - f(a)|$$

ملاحظة: لتكن $f(x)$ دالة معرفة على المجال المحدود $[a,b]$ إذا أمكن تجزئة هذا المجال عن قبل

$$[a,c_1];[c_1,c_2] \dots [c_m,b]$$

بحيث تكون الدالة $f(x)$ مطردة على كل منها فتكون محدودة التغير على هذا المجال وكان التغير الكلي

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |f(c_1) - f(a)| + |f(c_2) - f(c_1)| + \dots + |f(b) - f(c_m)|$$

الإثبات: حسب ... الفرض الدالة f مطردة على كل مجال $[c_k, c_{k+1}]$

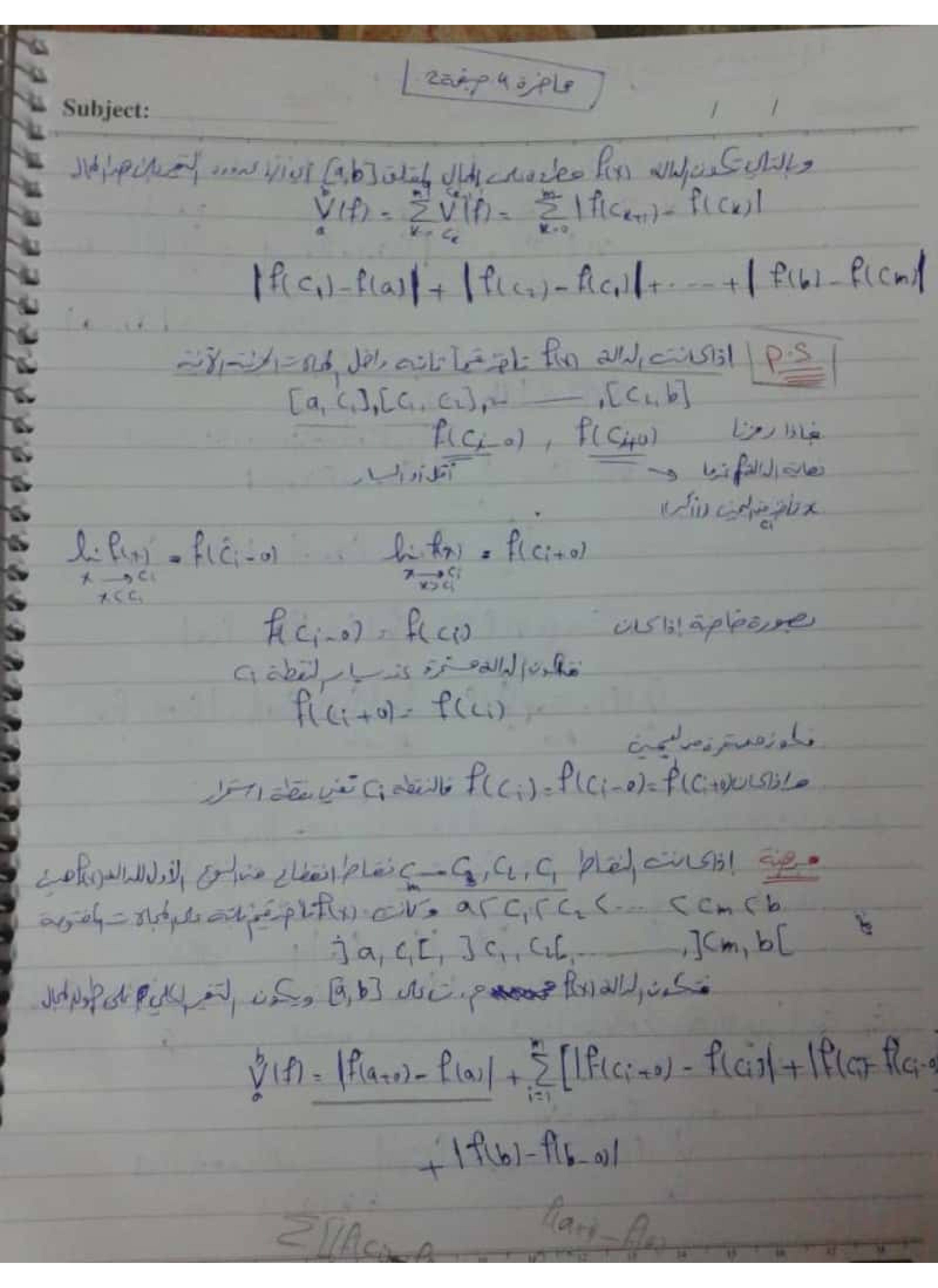
$; k = 0,1,2,\dots m$

$$c_0 = a,\ c_{m+1} = b$$

لذا التغير الكلي

$$\overset{c_{k+1}}{\underset{c_k}{V}}(f) = |f(c_{k+1}) - f(c_k)|$$

$; k = 0,1,2,\dots m$



محاضرة 4 جمعة

Subject: / /

وبالتالي تكون الدالة f(x) محدودة التغير على المجال [a,b] أي أنها محدودة التغير على المجال

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \sum_{k=0}^{m} \overset{c_{k+1}}{\underset{c_k}{V}}(f) = \sum_{k=0}^{m} |f(c_{k+1}) - f(c_k)|$$

$$|f(c_1) - f(a)| + |f(c_2) - f(c_1)| + \dots + |f(b) - f(c_m)|$$

P.S إذا كانت الدالة f(x) تامة رتيبة داخل المجالات الجزئية الآتية

$$[a, c_1], [c_1, c_2], \dots, [c_m, b]$$

فإذا رمزنا $f(c_i - 0)$, $f(c_i + 0)$

نهاية الدالة f تقربا ← أقل أو اليسار

عند تقربها من اليمين (أكبر) c_i

$$\lim_{\substack{x \to c_i \\ x < c_i}} f(x) = f(c_i - 0) \qquad \lim_{\substack{x \to c_i \\ x > c_i}} f(x) = f(c_i + 0)$$

بصورة خاصة إذا كان $f(c_i - 0) = f(c_i)$

فتكون الدالة مستمرة من يسار النقطة c_i

$f(c_i + 0) = f(c_i)$

فتكون مستمرة من اليمين

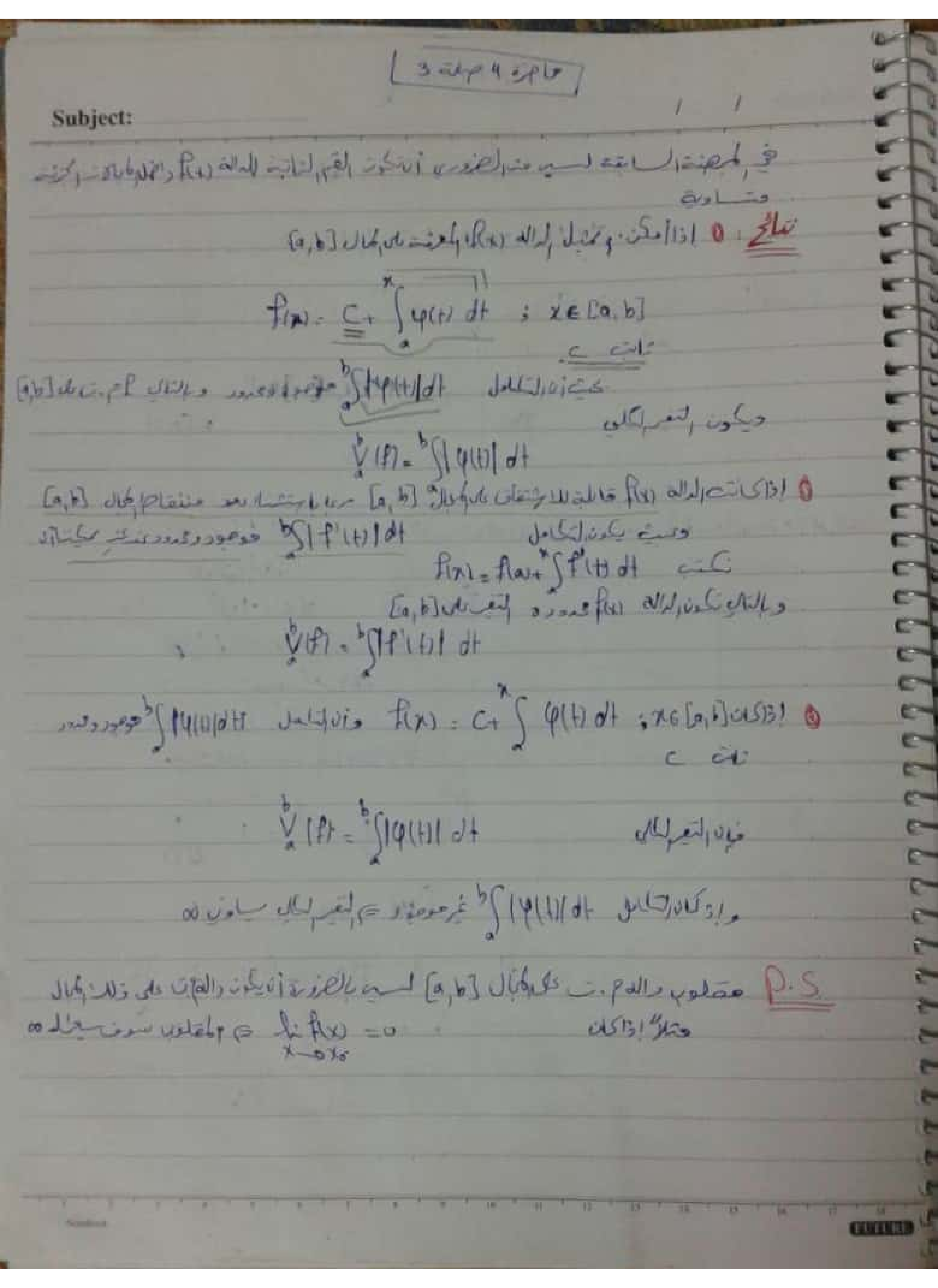
وإذا كانت $f(c_i) = f(c_i - 0) = f(c_i + 0)$ فالنقطة c_i تعني نقطة استمرار

مبرهنة: إذا كانت النقاط $c_1, c_2, c_3, \dots, c_m$ نقاط انقطاع من النوع الأول للدالة f(x) حيث $a < c_1 < c_2 < \dots < c_m < b$ وكانت f(x) تامة رتيبة على المجالات المفتوحة $]a, c_1[,]c_1, c_2[, \dots,]c_m, b[$

فتكون الدالة f(x) م.ت على [a,b] ويكون التغير الكلي لها على المجال

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |f(a+0) - f(a)| + \sum_{i=1}^{m} \left[|f(c_i + 0) - f(c_i)| + |f(c_i) - f(c_i - 0)| \right]$$

$$+ |f(b) - f(b - 0)|$$



Subject:

في المحاضرة السابقة ليس من الضروري أن تكون القيم الثابتة للدالة f(x) والتغيرات الكلية متساوية

ملاحظة: ① إذا أمكن تمثيل الدالة f(x) المعرفة على المجال [a,b]

$$f(x) = C + \int_a^x \varphi(t)\, dt \quad ; \quad x \in [a,b]$$

ثابت C

حيث أن التكامل $\int_a^b |\varphi(t)|\, dt$ موجود ومحدود وبالتالي f محدودة التغير على [a,b]

ويكون التغير الكلي

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^b |\varphi(t)|\, dt$$

② إذا كانت الدالة f(x) قابلة للاشتقاق على المجال [a,b] ما عدا عدد منته من نقاط المجال [a,b]

وحيث يكون التكامل $\int_a^b |f'(t)|\, dt$ موجود ومحدود نكتب

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$$

وبالتالي تكون الدالة f(x) محدودة التغير على [a,b]

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^b |f'(t)|\, dt$$

③ إذا كانت $f(x) = C + \int_a^x \varphi(t)\, dt \; ; x \in [a,b]$ وأن التكامل $\int_a^b |\varphi(t)|\, dt$ موجود ومحدود

ثابت C

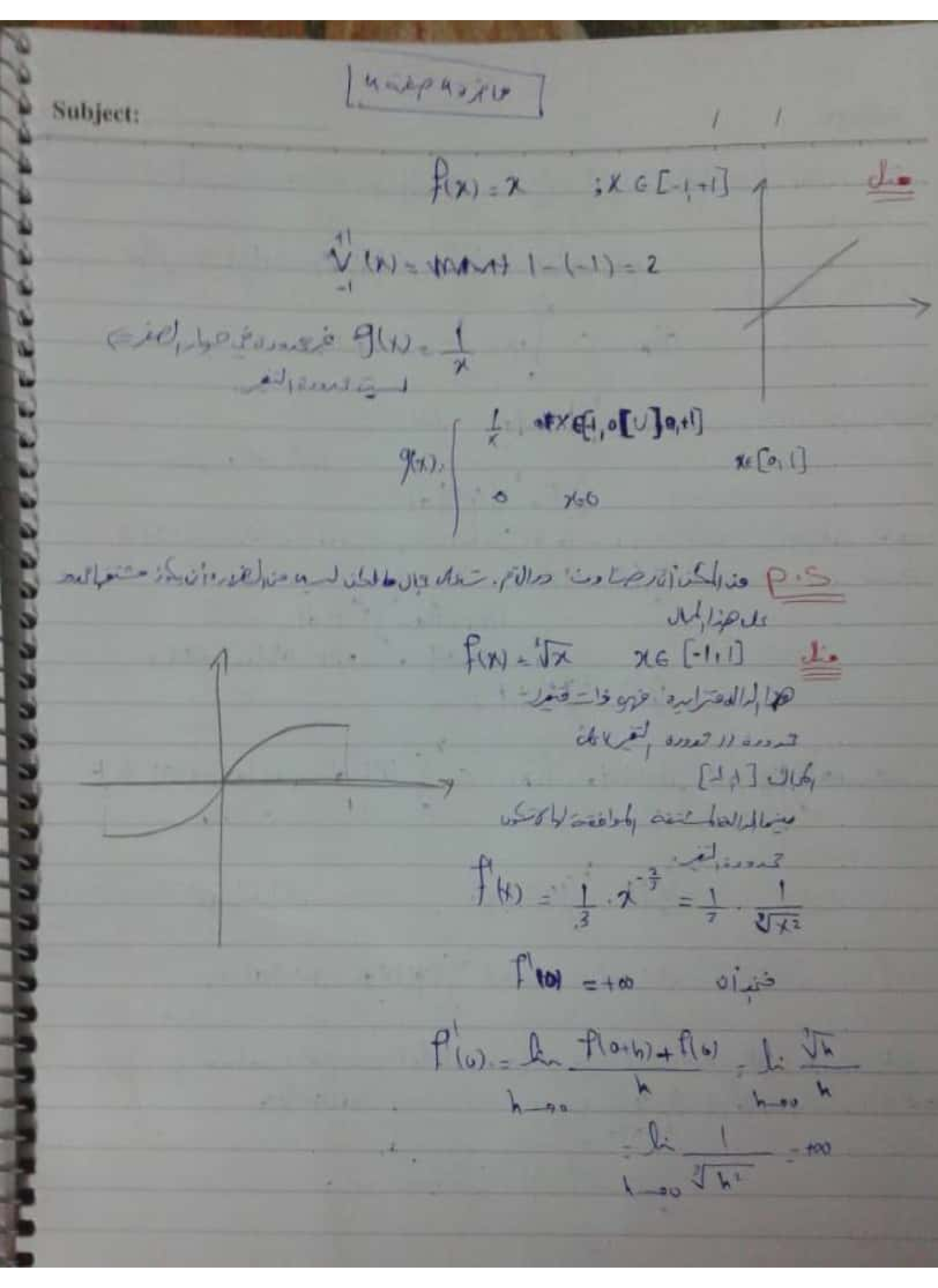
فإن التغير الكلي

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \int_a^b |\varphi(t)|\, dt$$

وإذا كان التكامل $\int_a^b |\varphi(t)|\, dt$ غير موجود ⇐ التغير الكلي يساوي ∞

P.S. مطلوب دالة م.ت على المجال [a,b] ليس بالضرورة أن يكون دالة على ذلك المجال

مثلاً إذا كان $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ ⇐ المطلوب سوف يساوي ∞



Subject:

مثال

$f(x) = x \quad ; x \in [-1, +1]$

$\overset{+1}{\underset{-1}{V}}(x) = 1 - (-1) = 2$

$g(x) = \frac{1}{x}$ غير محدودة في جوار الصفر

ليست محدودة التغير

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in [-1, 0[\cup]0, +1] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x \in [0, 1]$

P.S [illegible]

على هذا المثال

مثال

$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad x \in [-1, 1]$

هذه الدالة الاعتيادية غير ذات تغير محدود // محدودة التغير على المجال $[-1, 1]$

بينما الدالة المشتقة المرافقة لها لا تكون محدودة التغير

$f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

$f'(0) = +\infty$ [illegible]

$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) + f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$

Scanned by CamScanner

محاضرة رقم 5

Subject:

تعريف دالة التغير: لتكن $f(t)$ دالة محدودة التغير على المجال $[a,b]$ ولنضع $V_f(a)=0$ و $V_f(x)=\overset{x}{\underset{a}{V}}(f)$; $a<x\le b$

عندئذٍ نسمي الدالة $V_f(x)$ دالة التغير للدالة $f(x)$ وأيضاً التغير الكلي للدالة f على المجال الجزئي $[a,x]$

من خواص دالة التغير: هي دالة محدودة $|V_f(x)| = \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) \le \overset{x}{\underset{a}{V}}(f) + \overset{b}{\underset{x}{V}}(f) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$

$; x\in[a,b]$

ومتزايدة وهي محدودة التغير.

- f دالة متزايدة وهي محدودة ... دالة محدودة التغير والتغير الكلي $\overset{b}{\underset{a}{V}}(V_f) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$

ملاحظة:

- اتصال V_f يتوقف على اتصال الدالة f

• إذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة في النقطة $x=c$ علماً أن c نقطة داخلية $a<c<b$ فيكون V_f مستمرة في النقطة ذاتها والعكس صحيح.

• إذا كانت الدالة $f(x)$ محدودة على مجال غير محدود من الشكل $[a,+\infty[$ ما نحصل على أي مجال جزئي من الشكل $[a,A]$ يكون التغير الكلي $\overset{\infty}{\underset{a}{V}}(f) = \sup_{A>a} \overset{A}{\underset{a}{V}}(f)$

$$= \sup_{A>a}|f(A)-f(a)| = |f(\infty)-f(a)|$$
$$; f(\infty)=\lim_{x\to\infty} f(x)$$

مثال: لتكن الدالة $f(x)=\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$; $x\in[a,+\infty[$ على المجال

نلاحظ أن الدالة المعطاة تكتب بالشكل

$f(x) = c + \int_a^x \varphi(t)\,dt$

$; \varphi(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$

[illegible]

Subject:

التكامل لدينا

$$\int_0^\infty |\varphi(t)|\,dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$$

نعوض $z^2 = t$ ، $z = \sqrt{t}$

$$2z\,dz = dt$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-z^2}\,dz = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$f(x)$ محدودة التغير على $[a,+\infty[$

والتغير $\overset{\infty}{\underset{0}{V}}(f) = \sqrt{\pi}$

برهنة الشرط اللازم والكافي

الشرط اللازم والكافي لتكون الدالة f محدودة التغير على المجال $[a,b]$ هو أن توجد دالة $F(x)$ محدودة ومتزايدة على هذا المجال وتحقق العلاقة التالية

$$|f(x'') - f(x')| \le F(x'') - F(x')$$

الإثبات: لزوم الشرط: نفرض أن الدالة $f(x)$ محدودة التغير على $[a,b]$ ولنأخذ الدالة $F(x) = V_f(x)$ دالة التغير وهي دالة متزايدة ومحدودة على المجال $[a,b]$ ومن خاصية أ [illegible]

$$\forall\ a \le x' < x'' \le b \ ; \quad x', x'' \in [a,b]$$

يكون

$$|f(x'') - f(x')| \le \overset{x''}{\underset{x'}{V}}(f) = \overset{x''}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x'}{\underset{a}{V}}(f) = V_f(x'') - V_f(x')$$

$$= F(x'') - F(x')$$

كفاية الشرط: نفرض أن الدالة $f(x)$ موجودة محدودة وتحقق الشرط الموجود.

لنأخذ T تجزئة اختيارية للمجال $[a,b]$

$$\forall T \in P[a,b] : T : [a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b]$$

$$V(f,T) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le \sum [F(x_k) - F(x_{k-1})]$$

$$= F(b) - F(a)$$ عدد موجب محدود

ومنه $f(x) \in$ دالة محدودة التغير على $[a,b]$.

Scanned by CamScanner

محاضرة 7 [illegible]

$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) \leq \nabla f(b) - f(a)$

• مبرهنة: الشرط اللازم والكافي لتكون $f(x)$ م.ت على $[a,b]$ هو أن تكتب بالشكل

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)$$

كل دالة فرق دالتين متزايدتين ومحدودتين على المجال $[a,b]$.

$f(x) = f_1(x) - f_2(x) \iff f(x)$ محدودة التغير على $[a,b]$.

الإثبات: نفرض أن $f(x)$ دالة م.ت على $[a,b]$ ولنضع $f_1(x) = V_f(x)$

$f_2(x) = V_f(x) - f(x)$

ولكن نعلم أن $f_1(x)$ دالة متزايدة ومحدودة على $[a,b]$

ولنثبت أن $f_2(x)$ دالة متزايدة. من أجل $a \leq x' < x'' \leq b$

$$f_2(x'') - f_2(x') = [V_f(x'') - V_f(x')] - [V_f(x') - f(x')]$$

$$= [V_f(x'') - V_f(x')] - [f(x'') - f(x')] \geq 0$$

$$\Rightarrow f_2(x'') \geq f_2(x')$$

وذلك علاقة أن $|f(x'') - f(x')| \leq \overset{x''}{\underset{x'}{V}}(f)$

$$-\overset{x''}{\underset{x'}{V}}(f) \leq f(x'') - f(x') \leq \overset{x''}{\underset{x'}{V}}(f)$$

$$f(x'') - f(x') \leq \overset{x''}{\underset{a}{V}}(f) - \overset{x'}{\underset{a}{V}}(f) \leq V_f(x'') - V_f(x')$$

نفرض أن $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ حيث أن $f_1, f_2 \Leftarrow$

دالتان متزايدتان ومحدودتان على $[a,b]$ وبالتالي كلا من f_1, f_2 تكون

دالة محدودة التغير على $[a,b]$